На правах рукописи

Кулаков Кирилл Александрович

ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА РЕАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ МОДЕЛЕЙ СЕТЕЙ ЭВМ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Петрозаводск — 2009

Работа выполнена в ГОУ ВПО Петрозаводский государственный университет

Научный руководитель:	кандидат технических наук, доцент Ю. А. Богоявленский
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Н. К. Косовский
	кандидат физико-математических наук, доцент В. Т. Вдовицын
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится "17"апреля 2009 г. в .... час. на заседании диссертационного совета Д 212.190.03 в Петрозаводском государственном университете по адресу: 185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Петрозаводского государственного университета.

Автореферат разослан "....."..................... 2009 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 212.190.03 В. В. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Сети ЭВМ постоянно усложняются за счет введения новых протоколов, роста числа приложений и требований к качеству обслуживания. Это приводит к усложнению прикладных технических задач управления сетевыми системами, что требует развития соответствующих методов математического моделирования. В моделях сетей ЭВМ необходимо учитывать дискретность сетей и управляющих воздействий на них, а также большую размерность.

Решение многих задач управления сетями основано на графовых моделях и их обобщениях (напр., гиперграфы), реализация которых использует базовые алгоритмы на графах (напр., поиск простых контуров, кратчайших путей, оптимальных потоков) и методы целочисленного линейного программирования (ЦЛП). На практике этот подход может приводить к затруднениям[1]. Так, кратчайшие пути могут порождать перегрузку линий связи, линейность целевой функции не всегда адекватна, оптимизационные задачи дают только одно решение, поиск альтернативных решений и различные обобщения графовых моделей требуют многократного использования базовых алгоритмов. В ряде случаев этих затруднений можно избежать, применяя модели на основе систем однородных неотрицательных линейных диофантовых уравнений (одНЛДУ) и базисов Гильберта (линейные диофантовы модели).

Коэффициенты системы одНЛДУ принадлежат множеству целых чисел $\mathbb{Z}$, а неизвестные — множеству неотрицательных целых $\mathbb{Z}_+$. Конечный и единственный базис Гильберта системы есть множество всех ее неразложимых решений за исключением нулевого. Концепция базиса Гильберта появляется в трудах ученых D. Hilbert, P. Gordan, J. G. van der Corput, E. B. Elliot и P. A. MacMahon. Сложность задачи решения таких систем исследуется в работах В. Н. Шевченко, Н. К. Косовского, A. Schriever, L. Pottier, M. Henk, L. Juban, J.-F. Romeuf и др. В диссертации рассматривается задача численного нахождения базиса Гильберта (НБГ).

Базис Гильберта является удобным средством для описания дискретных свойств сетей ЭВМ и может использоваться при решении задач обеспечения надежности сетей, идентификации структуры нагрузки канала, описании маршрутов с заданными свойствами[2]. В диссертации проблема построения линейных диофантовых моделей рассматривается на примере актуальной прикладной технической задачи — восстановления соединений в сети ЭВМ.

[1] Traffic engineering with MPLS in the Internet / X. Xiao, A. Hannah, B. Bailey et al. // IEEE Net. Mag. 2000. Vol. 14. P. 28–33.

[2] Korzun, D. A diophantine model of routes in structured P2P overlays / D. Korzun, A. Gurtov // ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review. 2008. Vol. 35, no. 4. P. 52–61.

Существующие методы восстановления (напр., IP reroute) не обеспечивают гарантированного времени восстановления. Кроме того, необходимо выполнять отбор маршрутов-кандидатов на основе дополнительных критериев. Например, некоторые маршруты восстановления могут не подходить из-за загруженности линий связи.

Задача восстановления соединений актуальна для технологии многопротокольной коммутации с использованием меток (Multiprotocol label switching, MPLS), позволяющей уменьшать время выбора направления пересылки пакета и выполнять рационализацию трафика. В алгоритме SLSP[3] находятся простые циклы в графе сети, по которым отбираются маршруты-кандидататы, затем для выбора оптимального маршрута решается задача ЦЛП. Трудоемкость последней зависит от выбора циклов и их числа.

Таким образом, актуальной является задача разработки линейных диофантовых моделей сетей MPLS для рационального поиска и отбора маршрутов. Автором предлагается иерархия таких моделей. Маршруты-кандидаты определяются базисом Гильберта, а для отбора предлагается использовать содержательный нелинейный критерий — кумулятивную характеристику маршрута.

Применение предлагаемых моделей возможно при условии наличия эффективных алгоритмов нахождения базиса Гильберта (НБГ) и их протестированных реализаций. В работах С. Л. Кривого, Д. В. Пасечника, G. Huet, M. Clausen, A. Fortenbacher, E. Contejean, E. Domenjoud, M. Filgueiras, A.-P. Tomás и других авторов предложен ряд алгоритмов НБГ для произвольных одНЛДУ и их систем. Эти алгоритмы представлены без верхних оценок сложности, а их реализации не проверены массовым тестированием. Нижние оценки сложности определяются размером базиса Гильберта и могут экспоненциально зависеть от размеров исходной системы. Такое положение определяет актуальность исследований частных классов систем одНЛДУ для построения эффективных алгоритмов НБГ.

M. Filgueiras и A. Tomás показали, что систему НЛДУ можно ассоциировать с контекстно-свободной грамматикой (АНЛДУ). Ю. А. Богоявленский и Д. Ж. Корзун развили этот результат, предложив метод построения системы АНЛДУ по произвольной КС-грамматике и двум цепочкам над ее алфавитом. При равенстве цепочек строится однородная система АНЛДУ (одАНЛДУ). В диссертации используется только алгебраическое определение такой системы.

Известно, что методы последовательного исключения для систем линей-

[3] Ho, P.-H. Reconfiguration of spare capacity for MPLS-based recovery in the Internet backbone networks / P.-H. Ho, H. T. Mouftah // IEEE/ACM Trans. Netw. 2004. Vol. 12, no. 1. P. 73–84.

ных уравнений справедливы, когда и коэффициенты, и неизвестные принадлежат полю или кольцу целых чисел. В то же время неизвестны аналоги метода исключения неизвестных, когда коэффициенты принадлежат множеству $\mathbb{Z}$, а неизвестные — множеству неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$.

Таким образом, актуальной является задача построения эффективного алгоритма НБГ для систем одАНЛДУ на основе метода последовательного исключения уравнений и неизвестных. Автором исследуется подход, позволяющий решать как задачу НБГ, так и задачу генерации систем с известным базисом Гильберта (ИБГ системы). К ним относятся тестовые, эталонные и модельные системы (последние структурно соответствуют реальным сетям MPLS, далее — М-системы).

Для практического применения алгоритмов НБГ необходимы тестирование и экспериментальная оценка эффективности программных реализаций, в том числе по сравнению с другими. В работе для сравнения используются реализации алгоритмов Syntactic[4] и SlopesSys[5].

Таким образом, актуальной является задача реализации алгоритмов НБГ и разработки программной системы (ПС) для их тестирования и экспериментального исследования предлагаемых моделей на М-системах. Для решения этих задач автором предлагается комплекс программ, доступный через Интернет с помощью Web-обозревателя.

Объект и предмет исследования. Объектами исследования являются сети MPLS, системы одАНЛДУ и базисы Гильберта, а предметом исследования — линейные диофантовы модели сетей ЭВМ, алгоритмы НБГ и генерации ИБГ систем, сложность алгоритмов, программные реализации алгоритмов и средства их экспериментального исследования.

Цели диссертационной работы состоят в следующем.

1. Развитие метода последовательного исключения для частного класса — систем одАНЛДУ, коэффициенты которых принадлежат $\mathbb{Z}$, а неизвестные — $\mathbb{Z}_+$. Разработка, обоснование, реализация, тестирование и экспериментальное исследование алгоритмов НБГ и генерации этих систем.

2. Разработка, обоснование и реализация линейных диофантовых моделей сетей MPLS для использования в алгоритме SLSP, а также проверка эффек-

[4]Корзун, Д. Ж. Grammar-Based Algorithms for Solving Certain Classes of Nonnegative Linear Diophantine Systems / Д. Ж. Корзун // Тр. межд. семинара Finnish Data Processing Week at the University of Petrozavodsk (FDPW'2000): Advances in Methods of Modern Information Technology. Vol. 3. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001. P. 52–67.

[5]Tomás, A. P. Algorithms for Solving Diophantine Equations in Naturals [Электронный ресурс] / A. P. Tomás, M. Filgueiras. Электрон. дан. DCC-FC & LIACC, Universidade do Porto. 2001. Режим доступа: http://www.dcc.fc.up.pt/~apt/dioph/, свободный. Загл. с экрана.

тивности алгоритмов НБГ на сгенерированных М-системах.

Методы исследований. В диссертационной работе используются методы линейной алгебры, математического моделирования, дискретной и вычислительной математики, теории сложности алгоритмов, технологии программного обеспечения и прикладной статистики.

Научная новизна. Для решения задачи восстановления соединений в сетях MPLS впервые предложено использовать линейные диофантовы модели на основе систем одАНЛДУ и базисов Гильберта.

Впервые предложены и обоснованы преобразования систем одАНЛДУ к трапециевидной форме и обратной подстановки базиса Гильберта для случая, когда коэффициенты системы принадлежат $\mathbb{Z}$, а неизвестные — $\mathbb{Z}_+$.

Разработан, обоснован и протестирован новый алгоритм НБГ произвольной системы одАНЛДУ, имеющий лучшие теоретические и экспериментальные оценки по сравнению с известными алгоритмами.

Разработаны и обоснованы пять алгоритмов генерации частных классов ИБГ систем одАНЛДУ. Ранее задача построения тестовых примеров решалась с помощью полученных вручную малых наборов систем или непосредственной (без построения базиса Гильберта) генерацией.

Практическая ценность. Предложенная иерархия моделей может быть использована при решении задачи восстановления соединений в сети MPLS. По сравнению с моделью, применяемой в алгоритме SLSP, разработанные модели учитывают больше важнейших свойств сетей MPLS и поэтому более удобны для практического использования.

Разработанные алгоритмы НБГ и генерации ИБГ систем могут быть использованы в прикладных задачах с дискретными переменными. Результаты выполненного экспериментального исследования позволяют оценить практическую эффективность реализаций таких алгоритмов.

Разработанный комплекс программ может быть использован для решения прикладных задач путем доступа через Интернет, а также для тестирования и экспериментального исследования алгоритмов НБГ.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Предложена иерархия линейных диофантовых моделей сетей MPLS для известного алгоритма SLSP восстановления соединений. Использование базиса Гильберта позволяет единообразно учитывать топологию, характеристики линий связи и множественную пересылку, а также строить кумулятивную характеристику для рационального отбора маршрутов-кандидатов.

2. Предложены преобразования системы одАНЛДУ к трапециевидной форме и обратной подстановки базиса Гильберта. Они развивают метод последовательного исключения для класса систем одАНЛДУ, позволяя разра-

батывать эффективные алгоритмы НБГ и генерации ИБГ систем.

3. Разработан, обоснован, реализован и протестирован псевдополиномиальный алгоритм НБГ произвольной системы одАНЛДУ TransSol. Сложность алгоритма позволяет реализовать с его помощью линейные диофантовы модели сетей MPLS реальных размерностей.

4. Разработаны и обоснованы пять алгоритмов генерации ИБГ систем, четыре из которых программно реализованы.

5. Разработан комплекс программ, содержащий реализации предложенных алгоритмов НБГ и генерации ИБГ систем, реализации алгоритмов НБГ других авторов, ПС alg_analyser для измерения потребляемых ресурсов и ПС Web-SynDic для доступа к исследуемым алгоритмам через Интернет.

6. Результаты тестирования и экспериментального исследования программных реализаций алгоритмов НБГ TransSol, Syntactic и SlopesSys показывают эффективность предложенного алгоритма TransSol при реализации линейных диофантовых моделей сетей MPLS.

Достоверность и обоснованность. Достоверность результатов подтверждается корректным выбором математического аппарата и программных технологий. Результаты обоснованы строгими математическими доказательствами, тестированием и вычислительным экспериментом.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международном научном семинаре “Finnish Data Processing Week at the University of Petrozavodsk (FDPW’2003)” (2003 г.), на конкурсе-конференции студентов и молодых ученых Северо-Запада “Технологии Microsoft в теории и практике программирования” (2004 г.), на Всероссийской научной конференции “Научный сервис в сети Интернет” (2004 г.), на второй международной научно-практической конференции “Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности” (2006 г.), на международной конференции “Развитие вычислительной техники в России и странах бывшего СССР: история и перспективы (SORUCOM’06)”, на международном семинаре “Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: теория и приложения (DCCN-2007)”, на XIV Всероссийской научно-методической конференции “Телематика’2007”, на научном семинаре “Проблемы современных информационно-вычислительных систем” механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. В. А. Васенина (2007 г.), на научном семинаре кафедры информатики математико-механического факультета СПбГУ под руководством проф. Н. К. Косовского (2008 г.), на семинаре Института прикладных математических исследований Карельского НЦ РАН под руководством проф. В. В. Мазалова (2008 г.), на семинаре кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. Г. М. Кобелькова (2008 г.), а также на научных семинарах кафедры информатики и математического обеспечения ПетрГУ.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 10 печатных работ, в том числе работа [1] в журнале, внесенном в список ВАК.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка использованной литературы (98 наименований), пяти приложений, имеет объем 136 машинописных страниц и 34 страницы приложений, содержит 25 рисунков и 12 таблиц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулирована цель и обоснована актуальность работы, определены объект и предмет исследования, описана ее структура и дан обзор работ, связанных с исследуемой проблематикой. Представлены основные результаты, показаны научная новизна и практическая ценность диссертации.

В первой главе предложены и обоснованы преобразования к трапециевидной форме и обратной подстановки базиса Гильберта, развивающие метод последовательного исключения. Обоснована целесообразность использования линейных диофантовых моделей сетей MPLS.

В п. 1.1 вводятся основные понятия и определения. Система одНЛДУ:

$$Ax = \mathbb{O}\,, \qquad A \in \mathbb{Z}^{n\times m}\,, \qquad x \in \mathbb{Z}_+^m\,, \tag{1}$$

где n — число уравнений системы, m — число неизвестных, A — матрица коэффициентов, $\mathbb{O}$ — нулевой вектор из $\mathbb{Z}^n$.

Ненулевое решение $h \in \mathbb{Z}_+^m$ системы (1) называется *неразложимым*, если оно не может быть представлено в виде суммы двух ненулевых решений этой системы. *Базисом Гильберта* системы (1) называется множество всех ее неразложимых решений $\mathcal{H} = \{h^{(1)}, \dots h^{(q)}\}$. Он единствен, конечен, а общее решение имеет вид $x = \sum_{s=1}^{q} \alpha_s h^{(s)}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть система S состоит из подсистем $S' = (A'x = \mathbb{O})$ и $S'' = (A''x = \mathbb{O})$, а $\{f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(q1)}\}$ есть базис Гильберта S'. Его *подстановка* в S'' приводит к системе $\widetilde{S}$ из уравнений $k = 1, \dots, n''$ и неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_{q1}$. Получено следующее описание базиса Гильберта системы S в терминах S' и $\widetilde{S}$.

Теорема 1.1. *Пусть* $\widetilde{\mathcal{H}} = \{g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(q2)}\}$ *есть базис Гильберта системы* $\widetilde{S}$. *Тогда базис Гильберта исходной системы* S *есть*

$$\mathcal{H} = \min\Big\{h^{(s)} = \sum_{p=1}^{q1} g_p^{(s)} f^{(p)} \mid s = 1, 2, \dots, q2\Big\}. \tag{2}$$

Здесь $\min X = \{x \in X \mid \nexists\, x' \in X : x' \leqslant x$ и $x' \neq x\}$.

Индексное разбиение: $I^{n,m} = \{I_0, I_1, \dots, I_n\}$, где $I_k \subseteq \mathbb{N}_m = \{1, \dots, m\}$, $\bigcup_{k=0}^{n} I_k = \mathbb{N}_m$, I_0 может быть пусто, $I_k \neq \varnothing$ для $k \neq 0$ и $I_k \cap I_j = \varnothing$ для $k \neq j$.

Определим *матрицу разбиения* $\mathrm{E}(I^{n,m}) \in \{0,1\}^{n\times m}$ следующим образом. Если $i \in I_k$, то $\mathrm{E}_{ki} = 1$, иначе $\mathrm{E}_{ki} = 0$. Столбцы в E для $i \in I_0$ — нулевые, а для $i \in I_k$, $k \neq 0$, — стандартные единичные вектора $\mathbf{e}_k$.

Ассоциированная с КС-грамматикой система одНЛДУ (одАНЛДУ):

$$\sum_{i\in I_k} x_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

В матричном виде $\mathrm{E}(I^{n,m})x = Ax$. В левой части любое x_i встречается не более одного раза.

Свойство 1.1. *Если S' получена из системы одАНЛДУ S удалением части уравнений или неизвестных, то S' — также система одАНЛДУ.*

Уравнение Фробениуса с единичными коэффициентами — это НЛДУ вида $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$ для некоторой константы $c \in \mathbb{Z}_+$.

<u>В п. 1.2</u> представлены проблемы вычислительной сложности реализации линейных диофантовых моделей сетей ЭВМ. Требование целочисленности и неотрицательности существенно затрудняет использование схем классических методов решения линейных систем. Задача НБГ является вычислительно трудоемкой, поскольку число базисных решений может экспоненциально зависеть от размерности системы и абсолютных величин коэффициентов. Существующие методы ориентированы на решение произвольной системы одНЛДУ и неприемлемы на практике в случае больших систем.

<u>В п. 1.3</u> рассматриваются частные случаи системы одАНЛДУ. Пусть $I^{n,m}$ и $J^{n,m}$ — индексные разбиения $\mathbb{N}_m$. Систему одАНЛДУ вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in I_k\setminus J_k} x_i = \sum\limits_{i\in J_k\setminus I_k} x_i, \quad k = 1,\ldots,n \\ \sum\limits_{i\in Z} x_i = 0, \quad Z \subseteq \mathbb{N}_m \\ \sum\limits_{i\in F} x_i = \sum\limits_{i\in F} x_i, \quad F \subseteq \mathbb{N}_m \end{cases} \tag{4}$$

назовем *симметричной* (содАНЛДУ). Она известна в теории потоков и определяет циркуляцию в орграфе $G(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m)$, где уравнения соответствуют вершинам $\mathbb{N}_n$, а неизвестные — дугам $\mathbb{N}_m$. Дуга i выходит из вершины k, если $i \in I_k$, и входит в вершину j, если $i \in J_j$. Уравнение для Z соответствует висячей вершине z с входящими дугами $i \in Z$. Множество F определяет петли.

Назовем *1одАНЛДУ* систему (3) при $n = 1$:

$$\sum_{i\in I_1} x_i = \sum_{j\in I_0} a_j x_j. \tag{5}$$

В работе используются следующие известные свойства.

Свойство 1.2. *Любое базисное решение h системы (4) соответствует простому контуру в G и наоборот, причем $h \in \{0,1\}^m$.*

Свойство 1.3. *Базис Гильберта (5) состоит из всех* $\begin{pmatrix} b \\ \mathbf{e}_j \end{pmatrix}$, *где* $b \in \mathbb{Z}_+^{|I_1|}$, $\sum_{i\in I_1} b_i = a_j$, *а* $\mathbf{e}_j$ *— единичный вектор из* $\mathbb{Z}^{|I_0|}$ *для* $j \in I_0$.

В п. 1.4 предлагаются преобразования системы одАНЛДУ к трапециевидной форме и обратной подстановки базиса Гильберта. Возьмем уравнение системы (3). Пусть $L_1 \subseteq I_1$ — множество индексов неизвестных, которые не встречаются в оставшихся уравнениях. Если $L_1 \neq \varnothing$, то уравнение принимает вид $\sum_{i\in L_1} x_i + \sum_{i\in I_1\setminus L_1} x_i = \sum_{i\notin I_1} a_{1i}x_i$.

Преобразование к трапециевидной форме ($S^{(1)} = S$, $k = 1, \ldots, r$).

1. Берем в $S^{(k)}$ уравнение, для которого $L_k \neq \varnothing$. Если такого уравнения нет, то преобразование завершено. Считаем, что выбрано первое уравнение.

2. Систему $S^{(k)}$ представим в виде (x_i для $i \in L_k$ не входят в $S^{(k+1)}$):

$$S^{(k)} = \begin{cases} \sum\limits_{i\in L_k} x_i + \sum\limits_{i\in I_k\setminus L_k} x_i = \sum\limits_{i\notin I_k} a_{ki}x_i \\ S^{(k+1)}. \end{cases} \tag{6}$$

3. Система $S^{(k+1)}$ является системой одАНЛДУ (свойство 1.1) и содержит на одно уравнение меньше, чем $S^{(k)}$. Неизвестные определяются индексами $U_{k+1} = \mathbb{N}_m \setminus \bigcup_{j=1}^{k} L_j$. Полагая $S^{(k+1)}$ текущей, переходим к шагу 1.

Полученная *трапециевидная форма* имеет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in L_k} x_i + \sum\limits_{i\in I_k\setminus L_k} x_i = \sum\limits_{i\notin I_k} a_{ki}x_i, \quad k = 1, 2, \ldots, r-1 \\ S^{(r)}. \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 1.2. *Система* $S^{(r)}$ *в (7) равносильна либо 1одАНЛДУ (при* $r = n$*), либо системе содАНЛДУ (при* $r < n$*).*

Обратная подстановка базиса Гильберта ($k = r-1, \ldots, 1$).

1. В (6) подставляем $\mathcal{H}^{(k+1)}$ в первое уравнение, получая

$$\sum_{i\in L_k} x_i + \sum_{i\in I_k\setminus L_k} \sum_{h\in\mathcal{H}^{(k+1)}} h_i\alpha_h = \sum_{i\notin I_k} a_{ki} \sum_{h\in\mathcal{H}^{(k+1)}} h_i\alpha_h; \tag{8}$$

2. Находим базис $\widetilde{\mathcal{H}}$ решая (8) относительно $(x_i)_{i\in L_k}$ и $(\alpha_h)_{h\in\mathcal{H}^{(k+1)}}$;

3. Вычисляем $\mathcal{H}^{(k)} = \min\Big\{\sum_{i\in L_k} x_i\mathbf{e}_i + \sum_{h\in\mathcal{H}^{(k+1)}} \alpha_h h \mid \binom{x}{\alpha} \in \widetilde{\mathcal{H}}\Big\}$;

4. Полагаем текущей систему $S^{(k-1)}$ и выполняем шаги 1–4.

Уравнение (8) может быть записано как

$$\sum_{i\in L_k} x_i = \sum_{h\in\mathcal{H}^{(k+1)}} d_{kh}\alpha_h\ , \quad \text{где } d_{kh} = \sum_{i\notin I_k} a_{ki}h_i - \sum_{i\in I_k\setminus L_k} h_i. \tag{9}$$

Следующая теорема показывает, что (9) есть 1одАНЛДУ.

Теорема 1.3. *Пусть система одАНЛДУ преобразована к (7) и* $R_k = \bigcup_{j=0}^{k-1} I_j$. *Тогда для любых* $k = 1, 2, \ldots, r$ *и* $h \in \mathcal{H}^{(k)}$ *выполняется: (а)* $\sum_{i\in R_k} h_i \leqslant 1$; *(б) если* $k \neq 1$, *то* $d_{k-1,h} \geqslant -1$.

В п. 1.5 перечислены достоинства предложенных преобразований по сравнению с общей схемой исключения, позволяющие решать задачу НБГ для систем большой размерности.

1. Число итераций может быть меньше n ($r \leqslant n$). При $r < n$ исходная система сводится не к одному уравнению, а к системе содАНЛДУ, для НБГ которой известны линейные по числу базисных решений алгоритмы (свойство 1.2). На каждой итерации обратной подстановки используется известный линейный алгоритм (свойство 1.3) для НБГ 1одАНЛДУ.

2. Промежуточная система $S^{(k)}$ всегда является подсистемой исходной системы, поскольку получена исключением уравнений и неизвестных.

3. На каждой итерации преобразования к трапециевидной форме может исключаться несколько неизвестных (x_i, $i \in L_k$), которые агрегируются в виде 1одАНЛДУ (9).

4. В обратной подстановке для произвольной системы одАНЛДУ нельзя полностью избавиться от выполнения операции отбора минимальных решений (2). Однако автором найден подкласс систем, для которых она не требуется (теорема 3.3 в гл. 3). Разработанные автором алгоритмы генерации М-систем не требуют этой операции.

В п. 1.6 выполняется обзор линейных диофантовых моделей и обосновывается целесообразность их выбора как математического объекта для моделирования сетей MPLS. В системе одАНЛДУ $\mathrm{E}(I^{n,m})x = Ax$ уравнения соответствуют маршрутизаторам сети MPLS, а неизвестные — линиям связи. Матрица A определяет характеристики пересылки пакетов по линиям связи. Базис Гильберта определяет маршруты соединения.

Во второй главе предложена иерархия линейных диофантовых моделей сетей MPLS для задачи восстановления соединений. Модели предназначены для замены исходной модели алгоритма SLSP.

В п. 2.1, 2.2 приведен обзор сетей MPLS и рассмотрена задача восстановления соединений. На практике сети MPLS насчитывают от 10 до 500 маршрутизаторов и часто близки к полносвязным. Имеется общий механизм восстановления, определяющий последовательность действий маршрутизаторов для поиска нового маршрута и переключения на него соединения.

В п. 2.3 дан обзор известных алгоритмов восстановления соединений в сетях MPLS. В алгоритме SLSP текущий маршрут разбивается на частично перекрывающиеся домены, для которых строятся маршруты восстановления. При разрыве соединения в поврежденном домене соответствующий участок заменяется. Алгоритм использует модель сети MPLS в виде графа $\Omega(N, L)$ с множествами узлов N и линий связи L. Для входного маршрутизатора домена построение маршрутов восстановления состоит из трех шагов: 1) построить множество CY простых циклов из $\Omega(N, L)$; 2) для каждого домена s текущего маршрута r отобрать простые циклы $CY_{r,s} \subset CY$, которые в точности проходят через s (цикл покрывает домен); 3) решая задачу ЦЛП, из элементов $CY_{r,s}$ выбрать оптимальный (на основе характеристик линий связи).

В п. 2.4 предлагается диофантова *модель топологии* сети MPLS, заданной орграфом $\Gamma(N,L)$ с матрицей инцидентности $\mathrm{E}(I^{n,m}) - \mathrm{E}(J^{n,m})$. Модель определяется системой содАНЛДУ $\sum_{i \in I_k} x_i = \sum_{i \in J_k} x_i$, $k = 1, \ldots, n$, равносильна исходной SLSP-модели и позволяет искать маршруты восстановления между всеми парами входных и выходных маршрутизаторов домена. Множество всех простых циклов CY определяется базисом Гильберта.

В п. 2.5 предлагается *модель с фиксированным соединением* r. Строим маршрут восстановления для домена $s = (\mathsf{u}, \mathsf{v})$ с входным и выходным маршрутизаторами u и v. Для этого в орграфе домена Γ_{rs}: 1) удалим все дуги, входящие в u или выходящие из v, 2) удалим внутренние вершины и дуги текущего маршрута, 3) добавим фиктивную дугу (v, u). В полученном орграфе $\Gamma_{rs}^{\mathsf{uv}}$ любой контур, проходящий через (v, u), определяет маршрут между u и v (получается исключением (v, u) из контура). Простые контуры определяются базисом Гильберта и формируют $CY_{r,s}$.

В п. 2.6 предлагается *модель с характеристиками линий связи*. Модель с фиксированным соединением дополняется характеристиками линий связи, которые принимают положительные целочисленные значения. Нулевое значение соответствует отсутствию линии связи, единичное значение — типичная характеристика, значения два и более — коэффициент ухудшения при включении этой линии связи в маршрут.

Пусть орграф $\Gamma_{rs}^{\mathsf{uv}}(A)$ с весами дуг $A = (a_{\mathsf{w}i})_{\mathsf{w} \in N, i \in L}$ получен из $\Gamma_{rs}^{\mathsf{uv}}$ добавлением фиктивных вершины z и дуги (v, z). Веса дуг (v, u) и (v, z) равны 1 и 0 соответственно. Орграфу $\Gamma_{rs}^{\mathsf{uv}}(A)$ соответствует система одАНЛДУ вида:

$$\begin{cases} x_{\mathsf{vu}} + x_{\mathsf{vz}} = \sum\limits_{i \notin I_{\mathsf{v}}} a_{\mathsf{v}i} x_i, \\ \sum\limits_{i \in I_{\mathsf{w}}} x_i = \sum\limits_{i \notin I_{\mathsf{w}}} a_{\mathsf{w}i} x_i, \quad \mathsf{w} \in N \setminus \{\mathsf{v}\}. \end{cases} \tag{10}$$

Величины x_i характеризуют, например, затраты на передачу данных в маршруте. Базисное решение x с $x_{\mathsf{vu}} = 1$ определяет маршрут восстановления, получаемый удалением дуг (v, u) и (v, z).

В п. 2.7 вводится кумулятивная характеристика $C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{v}}$ маршрута (u, v), представляющая собой нелинейный критерий его качества. Пусть маршрут (u, v) состоит из вершин $\mathsf{u} = \mathsf{w}_0$, w_1, w_2, $\ldots$, $\mathsf{w}_l = \mathsf{v}$. Тогда $C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{v}}$ вычисляется через вложенные маршруты $(\mathsf{u}, \mathsf{w}_k)$ начиная с вершины u. Ее значение для w_k

зависит от значений для всех предыдущих вершин (см. правую часть (10)):

$$C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{u}} = 1, \quad C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{w}_k} = \sum_{i \notin I_{\mathsf{w}_k}} a_{\mathsf{w}_k i} P_i(C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{w}_t}), \quad k = 1, \ldots, l, \quad t < k,$$

где $P_i(C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{w}_t}) = x_i$ — часть кумулятивной характеристики маршрута $(\mathsf{u}, \mathsf{w}_t)$, проходящего через дугу $i \in I_{\mathsf{w}_t}$. Зависимость P_i от $C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{w}_t}$ определяется решениями уравнения Фробениуса $\sum_{i \in I_{w_t}} P_i = C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{w}_t}$ (см. левую часть (10)). Начиная с исходной вершины в $C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{w}}$ накапливаются произведения линейных комбинаций кумулятивной характеристики маршрута. Число множителей равно числу вершин маршрута, а линейные комбинации составляются по дугам маршрута, входящим в w. Когда маршрут состоит из одного пути в графе, то $C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{v}} = a_{\mathsf{w}_1 i_1} a_{\mathsf{w}_2 i_2} \ldots a_{\mathsf{v} i_v}$.

Если дуга i неэффективна (значение $a_{\mathsf{w}i} > 1$), то добавление к $C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{w}}$ величины $a_{\mathsf{w}i} x_i$ увеличивает оценку затрат x_i на передачу данных в маршруте по дуге i в $a_{\mathsf{w}i}$ раз. Это соответствует принципу "слабого звена" — наличие неэффективной линии связи приводит к ухудшению качества маршрута.

Предложенная модель допускает простое вычисление кумулятивной характеристики. Пусть маршрут (u, v) определяется базисным решением x $(x_{\mathsf{vu}} = 1)$. Тогда $C_{\mathsf{u}}^{\mathsf{v}} = x_{\mathsf{vu}} + x_{\mathsf{vz}} = x_{\mathsf{vz}} + 1$.

В силу свойств базиса Гильберта базисное решение x определяет маршрут с минимальным значением x_i для некоторой дуги i маршрута. Тем самым при решении задачи НБГ выполняется рациональный отбор маршрутов-кандидатов (шаг 2 алгоритма SLSP), что уменьшает трудоемкость поиска оптимального маршрута восстановления с использованием ЦЛП (шаг 3).

В п. 2.8 предлагается *модель с множественной пересылкой*. Физический интерфейс маршрутизатора может реализовать несколько линий связи. На основе модели с характеристиками линий связи и с фиксированным соединением построим модель в виде системы одАНЛДУ общего вида (3), учитывающую варианты множественной пересылки. В матрице A дополнительно к столбцам соответствующим линиям связи указываются столбцы, соответствующие множественной пересылке. Для этой модели также справедливо понятие кумулятивной характеристики, введенное в п. 2.7.

В п. 2.9 обсуждается практическое применение предложенных моделей. Предлагаемые автором линейные диофантовы модели сетей MPLS предназначены для замены исходной модели алгоритма SLSP. Они позволяют реализовать шаги 1 и 2 и упростить шаг 3 алгоритма SLSP.

Базис Гильберта используется для поиска и отбора кандидатов на маршрут восстановления. Базисное решение определяет простой маршрут (не является комбинацией других маршрутов). Это позволяет рассматривать как кратчайшие пути, так и более длинные, а также явно отсеиваются комбинации простых маршрутов, даже если их длина не превосходит ограничение.

Основной проблемой применения диофантовых моделей на практике является трудоемкость задачи НБГ, зависящая от размера базиса Гильберта. Введенные в моделях ограничения на маршруты-кандидаты (условие $x_{\mathsf{vu}} = 1$ и пороговое значение кумулятивной характеристики) позволяют уменьшить размерность задачи ЦЛП на шаге 3 алгоритма SLSP.

В третьей главе на основе предложенных в гл. 1 преобразований разрабатываются алгоритмы НБГ и генерации ИБГ систем.

В п. 3.1 выполняется постановка задач НБГ и генерации ИБГ систем. Последняя заключается в построении системы (3) и ее базиса Гильберта $\mathcal{H}$ при заданных ограничениях на процесс и результат генерации. Входные параметры: число уравнений n и неизвестных m, ограничения сверху на коэффициенты $||A||$ и базис Гильберта $||\mathcal{H}||$, $q = |\mathcal{H}|$. Результат: матрицы коэффициентов A и $\mathrm{E}(I^{n,m})$ и базис Гильберта $\mathcal{H}$.

В п. 3.2 изложен способ построения оценок сложности алгоритмов НБГ и генерации ИБГ систем. Используется модель с произвольным доступом к памяти (RAM) с операцией умножения. На основе верхних оценок затраченных времени и памяти исследуются *временна́я сложность* T и *емкостная сложность* V. Оценивается память для хранения всех данных, кроме входных и результата. Сложность оценивается в зависимости от размера входных и выходных данных n, m, $||A||$ и $||\mathcal{H}||$. Если сложность ограничена полиномом от всех этих параметров, то алгоритм является *псевдополиномиальным*.

В п. 3.3 предлагается псевдополиномиальный алгоритм НБГ произвольной системы одАНЛДУ (TransSol):

I. Выполнить алгоритм преобразования к трапециевидной форме, получая последовательность систем $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, …, $S^{(r)}$.

II. Найти базис Гильберта $\mathcal{H}^{(r)}$ системы $S^{(r)}$. Для 1одАНЛДУ используется свойство 1.3, для системы содАНЛДУ — свойство 1.2.

III. Выполнить алгоритм подстановки базиса для систем $S^{(r-1)}$, …, $S^{(1)}$, получая последовательность базисов $\mathcal{H}^{(r-1)}$, …, $\mathcal{H}^{(1)}$.

В диссертации получены следующие базовые оценки сложности.

Теорема 3.1. *Сложность алгоритма преобразования к трапециевидной форме в наихудшем случае составляет* $T = O(mn)$ *и* $V = O(m)$.

Для этапа II известны алгоритмы НБГ с оценками сложности $T = O((m+n)q)$ и $V = O(m+n)$, где $q = |\mathcal{H}^{(r)}|$. Пусть $Q = \max\limits_{k=1,\ldots,r}\{|\widetilde{\mathcal{H}}^{(k)}|\}$.

Теорема 3.2. *Сложность алгоритма подстановки базиса Гильберта в наихудшем случае составляет* $T = O(mnQ^2)$ *и* $V = O(mQ)$.

Пусть $|\widetilde{\mathcal{H}}^{(k)}| = O(q)$, где $q = |\mathcal{H}| = |\mathcal{H}^{(1)}|$. Тогда сложность подстановки линейна по числу базисных решений исходной системы. Автором исследован один из таких случаев (здесь $\mathcal{H}_-^{(k+1)} = \{h \in \mathcal{H}^{(k+1)} \mid d_{kh} = -1\}$).

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathcal{H}_-^{(k+1)} = \varnothing$ *для* $k = r-1, r-2, \dots, 1$. *Тогда сложность алгоритма подстановки базиса Гильберта в наихудшем случае составляет* $T = O(mnq)$ *и* $V = O(mq)$.

В алгоритме TransSol размер базисов Гильберта исходной и промежуточных систем может оказаться большим. Предложенные модели сетей MPLS допускают использование части базиса Гильберта. Автором предлагаются три способа соответствующей модификации алгоритма: 1) вводится ограничение на размер базиса Гильберта, 2) рассматриваются только решения с $x_i \geqslant 1$ (проходящие через дугу i) и 3) рассматриваются только решения с заданным пороговым значением кумулятивной характеристики. Первые два способа — эвристические, поскольку не гарантируют отбор всех искомых маршрутов.

В п. 3.4–3.8 предложены алгоритмы генерации частных классов ИБГ систем, получены оценки сложности (теоремы 3.5, 3.7, 3.9, 3.10, 3.12).

Алгоритм JordanGen строит систему $(\mathrm{E}(I^{n,p})|B)x = (\mathrm{E}(I^{n,p})|B+\Delta)x$ и базис $\mathcal{H} = \{e_i\}_{i=1}^{p}$, где $B \in \{0,1\}^{n\times(m-p)}$, $\sum_{i=1}^{n} B_{ik} = 1$ для $k = 1,\dots,m-p$ и $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-p)}$, $\sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} > 0$ для $i = 1,\dots,m-p$.

Алгоритм GaussGen строит систему $(\mathbb{I}|B)x = (D|B+\Delta)x$ и базис $\mathcal{H} = \{h^{(s)}\}_{s=1}^{m-n}$. Если $i > n$ и $i - n = s$, то $h_i^{(s)} = 1$. Если $i > n$ и $i - n \neq s$, то $h_i^{(s)} = 0$. Иначе $h_i^{(s)} = G_{si}$. Матрица $B \in \{0,1\}^{n\times(m-n)}$ строится как в алгоритме JordanGen. Матрица $D \in \mathbb{Z}_+^{n\times n}$: если $i+1 < j$, то $D_{ij} \in \mathbb{Z}_+$, если $i+1 = j$, то $D_{ij} \in \mathbb{N}$, иначе $D_{ij} = 0$. Матрица $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-n)}$. Матрица $\mathbb{I}$ — единичная $(n\times n)$-матрица.

Алгоритм ExtGaussGen строит систему $(\mathrm{E}(I^{n,p})|B)x = (D|B+\Delta)x$ и базис $\mathcal{H} = \{h^{(s)}\}_{s=1}^{q}$. Если $i > l_n$ и $\sum_{j=l_n+1}^{m} h_j^{(s)} = 1$, то $h_i^{(s)} \in \{0,1\}$, иначе $h_i^{(s)} \geqslant 0$. Разбиение $I^{n,p} = \{\{1,\dots,l_1\},\{l_1+1,\dots,l_2\},\dots,\{l_{n-1}+1,\dots,l_n\}\}$ для $0 = l_0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_n = l_{n+1} = p$ и $n \leqslant p < m$. Матрица $B \in \{0,1\}^{n\times(m-p)}$ строится как в алгоритме JordanGen. Матрица $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-p)}$. Матрица $D \in \mathbb{Z}_+^{n\times p}$: если $j \leqslant l_i$, то $D_{ij} = 0$, если $l_i < j \leqslant l_{i+1}$, то $D_{ij} \in \mathbb{N}$, иначе $D_{ij} \in \mathbb{Z}_+$.

Алгоритм SymGen строит систему содАНЛДУ $\mathrm{E}(I^{n,m})x = \mathrm{E}(J^{n,m})x$ и базис $\mathcal{H} = \{h^{(s)} \in \{0,1\}^m\}_{s=1}^{q}$ на основе орграфа $G(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m)$ системы (4) и его простых контуров.

Алгоритм ExtSymGen строит систему

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{E}(I^{b,p}) & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathrm{E}(I^{n-b,m-p}) \end{array}\right) x = \left(\begin{array}{c|c} D & \Delta \\ \hline \mathbb{O} & \mathrm{E}(J^{n-b,m-p}) \end{array}\right) x$$

и базис $\mathcal{H} = \{h^{(s)}\}_{s=1}^{q}$. Если $i \leqslant p$, то $h_i^{(s)} \geqslant 0$, иначе $h_i^{(s)} \in \{0,1\}$. Матрица $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{b\times(m-p)}$. Матрица $D \in \mathbb{Z}_+^{b\times p}$ строится как в алгоритме ExtGaussGen, а матрицы $\mathrm{E}(I^{n-b,m-p})$ и $\mathrm{E}(J^{n-b,m-p})$ — алгоритмом SymGen.

Для всех алгоритмов генерации доказано (теоремы 3.4, 3.6, 3.8, 3.11), что получаемый базис Гильберта удовлетворяет генерируемым системам. Результаты доказанных в гл. 3 теорем об оценках сложности сведены в табл. 1. Для сравнения даны оценки сложности алгоритма Syntactic.

Таблица 1

Сложность алгоритмов

Алгоритм	Временна́я сложность	Емкостная сложность
TransSol	$O(mnQ^2)$	$O(mQ)$
TransSol (условие т. 2.3)	$O(mnq)$	$O(mq)$
Syntactic	$O(m^2n^2Q_{\mathrm{s}}^3)$	$O(mn^2Q_{\mathrm{s}})$
JordanGen	$O(m^2)$	$O(mn)$
GaussGen	$O(mn(m-n))$	$O(m^2)$
ExtGaussGen	$O(mnq)$	$O(m(n+q))$
SymGen	$O(m(m+n)q)$	$O(mq)$
ExtSymGen	$O(m(m+n)q)$	$O(m(n+q))$

В п. 3.9 рассматривается применение алгоритмов НБГ и генерации ИБГ систем для реализации линейных диофантовых моделей сетей MPLS.

М-системы модели топологии генерируются алгоритмом SymGen без ограничений, а модели с фиксированным соединением — алгоритмом SymGen с фиксацией текущего маршрута $r = (\mathsf{u}, \mathsf{v})$ следующим образом. Для сгенерированной системы $\mathrm{E}(I^{n,m})x = \mathrm{E}(J^{n,m})x$ с базисом Гильберта $\mathcal{H}'$ выбираем $0 < k_{\mathsf{u}} \leqslant n$, $0 < k_{\mathsf{v}} \leqslant n$ и $i_{\mathsf{vu}} \in I_{k_{\mathsf{v}}} \bigcap J_{k_{\mathsf{u}}}$, удаляем все неизвестные x_i: $i \in I_{k_{\mathsf{v}}} \bigcap J_{k_{\mathsf{u}}} \setminus \{i_{\mathsf{vu}}\}$ и строим $\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{H}' \mid h_{i_{\mathsf{vu}}} = 1\}$.

М-системы модели с характеристиками линий связи генерируются алгоритмами GaussGen, ExtGaussGen и ExtSymGen следующим образом. Для сгенерированной системы $\mathrm{E}(I^{n,m})x = Ax$ с базисом Гильберта $\mathcal{H}'$ выбираем $0 < \mathsf{u} \leqslant n$, $\mathsf{v} = 1$, для которых $a_{\mathsf{u}1} > 0$, удаляем все неизвестные x_i: $i > 1$, $i \in I_v$ и $a_{\mathsf{u}i} > 0$ и строим $\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{H}' \mid h_1 = 1\}$.

Для алгоритма GaussGen матрица $D \in \mathbb{Z}_+^{n\times n}$: если $i + 1 = j$, то $D_{ij} \in \mathbb{N}$, иначе $D_{ij} = 0$. Матрица $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-n)}$ удовлетворяет условию $\Delta_{ij} > 0 \Leftrightarrow B_{ij} > 0$ для $j = 1, \ldots, m-n$. Для алгоритмов ExtGaussGen и ExtSymGen матрица $D \in \mathbb{Z}_+^{n\times p}$: если $l_i < j \leqslant l_{i+1}$, то $D_{ij} \in \mathbb{N}$, иначе $D_{ij} = 0$. Матрица $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-p)}$ удовлетворяет условию $\Delta_{ij} > 0 \Leftrightarrow B_{ij} > 0$ для $j = 1, \ldots, m-p$.

М-системы модели с множественной пересылкой генерируются алгоритмами GaussGen, ExtGaussGen и ExtSymGen как и для модели с характеристиками линий связи, но без ограничений на коэффициенты системы.

В четвертой главе описан комплекс программ для массового автоматизированного тестирования и экспериментального исследования программных реализаций алгоритмов НБГ.

В п. 4.1, 4.2 сформулирована задача экспериментального исследования практической эффективности алгоритмов НБГ и описан способ вычисления потребляемых ресурсов. Для их измерения используются наборы эталонных систем и М-систем. Потребление общего времени оценивается стандартным образом. Оценка потребления системного времени и требуемой памяти основана на анализе данных операционной системы.

В п. 4.3 описан комплекс программ, содержащий реализации предложенных автором алгоритмов НБГ и генерации ИБГ систем, реализации алгоритмов НБГ других авторов, ПС alg_analyser для измерения потребляемых ресурсов и ПС Web-SynDic[6] для доступа к алгоритмам через Интернет.

Алгоритмы НБГ, генерации и ПС alg_analyser реализованы в среде ОС Linux на языке ANSI C с использованием GNU C compiler (gcc 4.1.2). Объем кода реализации алгоритмов равен 3986 LOC, ПС alg_analyser — 2660 LOC.

ПС Web-SynDic предоставляет доступ через Интернет к алгоритмам решения и генерации с помощью web-обозревателя и предназначена для демонстрации работы алгоритмов, тестирования их реализаций, экспериментального исследования их практической эффективности, а также реализует услугу решения систем одАНЛДУ. Используются платформа Java (Java SDK 1.6.0) и сервер Apache Tomcat 5.0. Объем кода реализации равен 11907 LOC.

В п. 4.4 представлены результаты трех частей экспериментов по тестированию, оцениванию практической эффективности и сравнительному анализу доступных реализаций алгоритмов НБГ: SlopesSys, Syntactic и TransSol.

Часть I (2002 г.). Массовое тестирование алгоритма Syntactic. Алгоритмы генерации: JordanGen и GaussGen. Построено 7 наборов, более $1.5 \cdot 10^6$ систем.

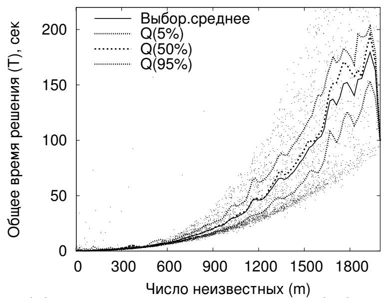
Часть II (2002 г.). Сравнение алгоритмов SlopesSys и Syntactic. Алгоритмы генерации: JordanGen и GaussGen. Построено 2 набора, 10^4 систем.

Часть III (2008 г.). Сравнение алгоритмов Syntactic и TransSol для модели с множественной пересылкой. Проведены шесть серий экспериментов для различных классов систем. Алгоритмы JordanGen, GaussGen и ExtGaussGen генерировали для каждой серии наборы из 5000 систем (в серии шесть — 800 систем). Общее число систем — 75800.

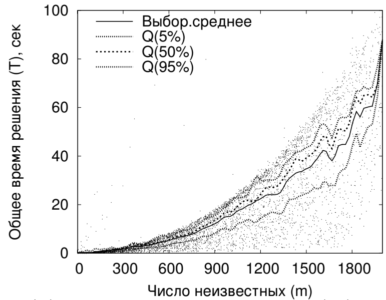
В части I ошибок в реализации алгоритма Syntactic выявлено не было. На используемом классе тестовых систем алгоритм допускает получение решения за время до десятков секунд даже в условиях больших размеров входных данных ($n, m \sim 10^2 \ldots 10^3$, $\max\{|a_{ij}| \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\} \sim 10^5$).

[6] http://websyndic.cs.karelia.ru

В частях II и III некоторые системы исключены из выборки (не были решены за выделенное время алгоритмами SlopesSys и Syntactic, но были решены алгоритмом TransSol). Вычислялись выборочные характеристики: среднее значение, выборочная медиана $Q(50\%)$ и процентили $Q(5\%)$ и $Q(95\%)$. Пример полученной экспериментальной зависимости общего времени решения от числа неизвестных представлен на рис. 1.



(a) Syntactic: зависимость $T(m)$



(b) TransSol: зависимость $T(m)$

Рис. 1: (Часть III, серия 5, ExtGaussGen) Зависимость общего времени решения от числа неизвестных m

Результаты экспериментов согласуются с полученными теоретическими оценками сложности и показывают практическую эффективность предложенного алгоритма TransSol. Он допускает решение больших систем ($m, q \sim 10^3$) в пределах десятков секунд (ЭВМ Intel Xeon, 2.80ГГц). По сравнению с алгоритмом Syntactic потребление памяти и общее время меньше на 10–35% и до двух раз соответственно. Отметим, что построение маршрутов восстановления для таких сетей на основе исходной SLSP-модели требует нескольких минут (ЭВМ SUN Ultra 80, 4×450МГц).

В заключении формулируются результаты диссертационной работы.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Кулаков, К. А. Итеративный алгоритм нахождения базиса Гильберта однородных линейных диофантовых систем, ассоциированных с контекстно-свободными грамматиками / К. А. Кулаков, Д. Ж. Корзун, Ю. А. Богоявленский // Вестник СПбГУ. Сер. 10. Вып. 2. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008. — С. 73–84.

2. Кулаков, К. А. Генерация систем неотрицательных линейных диофантовых уравнений / К. А. Кулаков // Материалы межд. конф. “Развитие вычислительной техники в России и странах бывшего СССР: история и перспективы”. — Т. 2. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2006. — С. 58–65.

3. Кулаков, К. А. Диофантова модель сети MPLS для восстановления соединений за полиномиальное время / К. А. Кулаков // Сб. тр. второй межд.

научно-практической конференции “Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности”. — Т. 5. — СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2006. — С. 137–143.

4. Кулаков, К. А. Восстановление соединений сети MPLS с использованием линейных диофантовых моделей / К. А. Кулаков // Тр. межд. семинара “Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: теория и приложения (DCCN-2007)”. — Т. 2. — М.: ИППИ РАН, 2007. — С. 23–27.

5. Кулаков, К. А. Технология автоматизации тестирования алгоритмов решения неотрицательных линейных диофантовых уравнений / К. А. Кулаков, Д. Ж. Корзун // Материалы межвузовского конкурса-конференции студентов и молодых ученых Северо-Запада “Технологии Microsoft в теории и практике программирования”. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. — С. 142–143.

6. Кулаков, К. А. Generating homogenious systems of equations for testing and experimental analysis of linear diophantine solvers / К. А. Кулаков, Д. Ж. Корзун // Тр. межд. семинара Finnish Data Processing Week at the University of Petrozavodsk (FDPW'2003): Advances in Methods of Modern Information Technology. — Vol. 5. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2005. — P. 259–278.

7. Кулаков, К. А. Восстановление маршрутов в опорных инфраструктурах высокопроизводительных телекоммуникационных системах на базе MPLS / К. А. Кулаков, Д. Ж. Корзун, Ю. А. Богоявленский // Тр. XIV Всероссийской науч.-метод. конф. Телематика'2007. — Т. 2. — СПб.: Изд-во СПбГУ ИТМО, 2007. — С. 398–399.

8. Проект Web-SynDic: Система удаленного решения линейных диофантовых уравнений в неотрицательных целых числах / Ю. А. Богоявленский, Д. Ж. Корзун, К. А. Кулаков, М. А. Крышень // Материалы межд. конф. “Развитие вычислительной техники в России и странах бывшего СССР: история и перспективы”. — Т. 1. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2006. — С. 136–145.

9. Система Web-SynDic для демонстрации и исследования синтаксических алгоритмов решения линейных диофантовых уравнений в неотрицательных целых числах / Д. Ж. Корзун, Ю. А. Богоявленский, К. А. Кулаков и др. // Тр. Всероссийской науч. конф. “Научный сервис в сети Интернет”. — М.: Изд-во МГУ, 2004. — С. 8–10.

10. Web-SynDic — система демонстрации и тестирования синтаксических алгоритмов решения неотрицательных линейных диофантовых уравнений / К. А. Кулаков, А. Ю. Сало, А. В. Ананьин и др. // Материалы межвузовского конкурса-конференции студентов и молодых ученых Северо-Запада “Технологии Microsoft в теории и практике программирования”. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. — С. 43–44.

Подписано к печати 26.02.2009.
Формат 60×89 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Изд. №62.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Петрозаводский государственный университет
Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ

185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.